Sugestões para a resolução dos problemas

1. Suponha-se que o ano com representação em quatro algarismos $20cd$ é um ano em que se realiza o Festival dos Restos. Considere-se o número $n = cd$ formado pelos dois últimos algarismos do ano. Como 20 é o resto da divisão de $20cd$ por n, tem-se $21 \leq n \leq 99$ e

$$2000 + n = q \times n + 20$$

para algum inteiro q, donde

$$1980 = (q - 1) \times n.$$

Logo n é um divisor de 1980 tal que $21 \leq n \leq 99$. Como a fatorização de 1980 em primos é $1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$, conclui-se que n está entre os elementos do conjunto

$$\{2^2 \times 3^2, 2^2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 11, 2 \times 3^2 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 2 \times 3 \times 11, 2 \times 11, 3^2 \times 5, 3^2 \times 11, 3 \times 11, 5 \times 11\}.$$

Portanto, o Festival dos Restos realiza-se na cidade de Numerópolis em 11 anos deste século, nomeadamente 2022, 2030, 2033, 2036, 2044, 2045, 2055, 2060, 2066, 2090, 2099.

2. Denotem-se de 1 a 9 os quadradinhos da bandeira, da esquerda para a direita e de cima para baixo. Note-se que se os quadradinhos 2 e 4 forem da mesma cor, há duas escolhas possíveis para a cor do quadradinho 1; se forem de cor diferente, há apenas uma escolha possível. Do mesmo modo, o número de escolhas para as cores dos quadradinhos 3, 7 e 9 depende das cores dos quadradinhos 2 e 6, 4 e 8, 6 e 8, respetivamente. Como todos os quadradinhos pares têm uma cor diferente do quadradinho central, só podem aparecer uma ou duas cores nos quadradinhos pares.

Se os quadradinhos pares são todos da mesma cor, há três escolhas para essa cor e duas escolhas para a cor de cada uma das casas ímpares. Assim, há $3 \times 2^5 = 96$ bandeiras diferentes.

Se nos quadradinhos pares há duas cores, há dois casos. Se as cores das casas $2, 4, 6$ e 8 estão alternadas, há três escolhas para a cor da casa 2, duas escolhas para a cor da casa 4 e todas os outros quadradinhos ficam com a cor determinada. Assim, há $3 \times 2 = 6$ bandeiras diferentes.

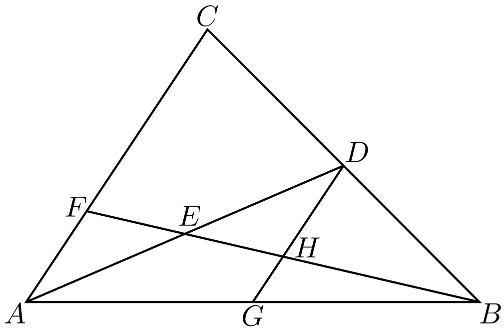
Se as cores das casas $2, 4, 6$ e 8 não estão alternadas, entre os pares $(2, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 6)$ e $(6, 2)$ há exatamente dois onde as cores são iguais. Há seis escolhas para esses dois pares, três escolhas para a cor do quadradinho 2, duas escolhas para a outra cor que aparece nos quadradinhos pares e duas escolhas para a cor de dois dos cantos. Para a casa central há uma única escolha possível. Assim, há $6 \times 3 \times 2 \times 2^2 = 144$ bandeiras diferentes.

Portanto, ao todo há $96 + 6 + 144 = 246$ cidades diferentes.

3. Como $[AD]$ é uma mediana de $[ABC]$, então área$[ABD]$ = área$[ACD] = 6$. Como $[BE]$ é uma mediana de $[ABD]$, tem-se área$[ABE]$ = área$[BDE] = 3$. De seguida mostra-se que área$[AEF] = 1$, pelo que área$[CDEF]$ = área$[ACD]$ − área$[AEF] = 6 - 1 = 5$.

Solução 1. Considere-se o ponto médio G do lado $[AB]$ e a interseção H das medianas $[BE]$ e $[DG]$. Os triângulos $[AEF]$ e $[DEH]$ são congruentes porque $\overline{AE} = \overline{DE}$ e as retas AC e DF são paralelas, uma vez que D e G são os pontos médios dos lados BC e BA, respetivamente.

As medianas intersetam-se a um terço do comprimento de cada uma delas, donde $\overline{EB} = 3\overline{EH}$. Tem-se então que área$[AEF]$ = área$[EHD]$ = área$[BDE]/3 = 1$.



Solução 2. Como na solução anterior, tem-se área$[AEF]$ =área$[EHD]$. Logo,

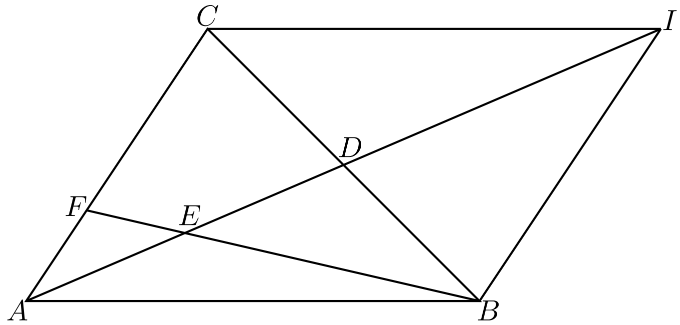
$$\text{área}[DCFH] = \text{área}[CDEF] + \text{área}[DEH] = \text{área}[CDEF] + \text{área}[AEF] = \text{área}[ADC] = 6.$$

Como $[BDH]$ e $[BCF]$ são semelhantes e $\overline{BC} = 2\overline{BD}$, então área$[BCF] = 4\,$área$[BDH]$. Logo área$[BDH] =$ área $[DCFH]/3 = 2$.

Finalmente área$[AEF] =$ área$[DEH] =$ área$[BDE]-$ área$[BDH] = 3 - 2 = 1$.

Solução 3. Seja I tal que $[ABIC]$ é um paralelogramo. As retas AC e BI são paralelas e por isso os triângulos $[AEF]$ e $[IEB]$ são semelhantes. O ponto D é o ponto médio de $[AI]$ por ser a interseção das diagonais do paralelogramo, e portanto $\overline{IE} = 3\overline{AE}$.

Então área$[IEB] = 9\,$área$[AEF]$. Como área$[IEB]$ =área$[BDE]+$ área$[BID] = 3 + 6 = 9$, então área$[AEF] = 1$.



4. Para ver que o número 9 não é arrumado, observe-se que para obter as somas 1 e 2 temos que ter as parcelas 1 e 2 e a única formas de escrever 9 como soma de parcelas distintas usando o 1 e o 2 é $9 = 1 + 2 + 6$, e não é possível obter o número 4 usando estas parcelas.

   Seja $t_k = 1 + 2 + \cdots + k$. Se $1 \leq n \leq t_k$, então existe um i tal que $t_{i-1} < n \leq t_i$, pelo que $n = t_i - m$, onde $m < i$. Assim, n é a soma de todas as parcelas de 1 a i, exceto a m. Portanto t_k é arrumado.

   Seja agora a tal que $t_k \leq a \leq 2t_{k-1} + 1$. Então

   $$a = 1 + 2 + \cdots + (k - 1) + b,$$

   com $k \leq b \leq t_{k-1} + 1$. Todos os números de 1 a t_{k-1} se obtêm como soma de algumas das parcelas de 1 a $k - 1$ e os números de b a a se obtêm como soma da parcela b com algumas das parcelas de 1 a $k - 1$. Como $b \leq t_{k-1} + 1$, todos os números de 1 a a se obtêm como soma de algumas das parcelas $1, \ldots, k - 1, b$, logo a é arrumado. Em particular, todos os números de $t_4 = 10$ a $2t_3 + 1 = 13$ são arrumados.

   Para $k \geq 5$, tem-se que

   $$2t_{k-1} + 1 = t_{k-1} + 1 + 2 + \cdots + (k - 2) + (k - 1) + 1 \geq t_{k-1} + k + (k + 1) = t_{k+1},$$

   pelo que todos os números a partir de $t_5 = 15$ são arrumados.

   O número 14 é arrumado porque $14 = 1 + 2 + 4 + 7$ e todos os números de 1 a 14 se obtêm como soma de algumas das parcelas $1, 2, 4$ e 7.

   Logo o maior número que não é arrumado é o 9.